Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da Lista de Exercícios sobre Permutação com repetição

1. Quantos números de 7 dígitos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8 supondo que:

   (a) não se têm restrições.

   Resposta: $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$

   (b) devem ser maiores que 6000000

   Resposta: Se o número é maior que 6000000, ele deverá começar por 6 ou por 8.

   Se o primeiro dígito for 6, então teremos 6 casas vazias para os demais dígitos, o que dá um total de $P_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$.

   Se o primeiro dígito for 8, então teremos 6 casas vazias para os demais dígitos, o que dá um total de $P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$.

   Logo, pelo princípio aditivo, o total de números maiores que 6000 é 120 + 180 = 300.

2. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3.

   Resposta: Dividiremos este número em 3 grupos disjuntos:

   (i) Os algarismos são 1,1,1,1,2. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ números distintos.

(ii) Os algarismos são 1,1,1,1,3. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ números distintos.

(iii) Os algarismos são 1,1,1,2,3. Com estes algarismos podemos formar $P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$ números distintos.

Logo, pelo princípio aditivo, temos $5 + 5 + 20 = 30$ números distintos.

3. A seguinte figura representa o mapa de uma cidade na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.

(a) Quantos são os trajetos de cumprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

***R*esposta:** Para ir de A até B deve - se andar 11 vezes (para a direita 6 vezes e para cima 5 vezes) o número de formas que isto pode ser feito é $P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$.

(b) Quantos desses trajetos passam por C?

***R*esposta:** Para ir de A até C deve - se andar 8 vezes (4 vezes para a direita e para cima 4 vezes), o número de formas que isto pode ser feito é $P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$. Analogamente, pode - se ir de C a B de $P_3^{2,1}$ $= 3$ formas distintas. Pelo princípio multiplicativo, podemos ir de A a B passando por C de $70.3 = 210$ formas.

4. Quantos são os anagramas de PARAGUAI que começam por vogais?

***R*esposta:** Classificaremos os anagramas de PARAGUAI em 3 grupos disjuntos:

(i) Anagramas começados em A: $P_7^{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!} = 2520$.

(ii) Anagramas começados em U: $P_7^{3,1,1,1,1} = 840$.

(iii) Anagramas começados em I: $P_7^{3,1,1,1,1} = 840$.

Pelo princípio aditivo, o total de anagramas é $2520 + 840 + 840 = 4200$.

5. Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?

   Resposta: O número de modos de arrumar as letras diferentes de A é $P_7^{2,2,1,1,1}$. Para 2 A's não ficarem juntos, temos que colocar os A's entre as outras letras (o que nos dá 8 espaços possíveis onde os A's podem ser colocados). Isso pode ser feito de C_8^3 maneiras. Logo pelo princípio multiplicativo temos $P_7^{2,2,1,1,1}.C_8^3 = 1260.56 = 70560$ anagramas.

6. Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICA supondo que:

   (a) não têm restrições,

   Resposta: $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$

   (b) começam por vogal,

   Resposta: Temos $P_9^{2,2,2,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!2!} = 45360$, começados em A. Temos $P_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!} = 15120$, começados por E ou por I. Logo, temos

$P_9^{2,2,2,1,1,1} + 2.P_9^{3,2,2,1,1} = 75600$ anagramas que começam por vogal.

(c) começam por consoante e terminam por vogal,

Resposta: Dividiremos estes anagramas em 3 grupos disjuntos:

1) Começam com a letra M.

Partiremos este grupo em outros 2 subgrupos disjuntos:

$(1.i)$ Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

$(1.ii)$ Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,1,1,1}.2 = \frac{8!}{3!2!}.2 = 6720$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,1,1,1,1} + P_8^{3,2,1,1,1}.2 = 16800$ anagramas que começam com M.

2) Começam com a letra T:

(2.i) Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

(2.ii) Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,1,1,1}.2 = \frac{8!}{3!2!}.2 = 6720$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,1,1,1,1} + P_8^{3,2,1,1,1}.2 = 16800$ anagramas que começam com T.

3) Começam com a letra C

(3.i) Terminam com a letra A: $P_8^{2,2,2,1,1} = \frac{8!}{2!2!2!} = 5040$

(3.ii) Terminam com a letra E ou I: $P_8^{3,2,2,1}.2 = \frac{8!}{3!2!2!}.2 = 3360$

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $P_8^{2,2,2,1,1} + P_8^{3,2,2,1}.2 = 8400$ anagramas que começam com C.

Para finalizar, pelo princípio aditivo, temos $16800 + 16800 + 8400 = 42000$ anagramas.

(d) não tem 2 vogais juntas.

Inicialmente escolhemos as posições das consoantes, temos $P_5^{2,2,1} = 30$. Fixada uma posição para as consoantes, temos 6 lugares para intercalar 5 vogais. Logo, o total de posições possíveis para as vogais é $C(6,5) = 6$. Fixados os lugares para as vogais temos $P_5^{3,1,1} = 20$ maneiras de

ordenar as vogais. Portanto, pelo princípio multiplicativo, resultam $P_5^{2,2,1}C(6,5)P_5^{3,1,1} = 3600$ anagramas sem vogais juntas.

7. Considere seqüências onde o 0 está repetido duas vezes e o 1 aparece repetido quatro vezes. Pede-se determinar o número de seqüências supondo que:

   (a) não têm restrições,

   Resposta: $P_6^{2,4} = 15$

(b) o primeiro termo da seqüência deve ser 1,

Resposta: Fixado um 1 na primeira posição temos $P_5^{2,3} = 10$ seqüências.

(c) a seqüência não pode ter os 2 zeros juntos.

Resposta: Devemos posicionar os 0´s entre os 1´s, Como são quatro 1´s temos 5 posições a escolha para alocar os dois 0´s, podemos fazer isso de $C(5, 2) = 10$ formas.